5. a) Suponha que existem N_+ ligações que fazem $0°$ e N_- que fazem um ângulo de $180°$.

Então,

$$N_+ - N_- = 2m$$

$$N_+ + N_- = N$$

Logo,

$$N_+ = \frac{N}{2} + m \quad , \quad N_- = \frac{N}{2} - m$$

O número de configurações correspondente é

$$\Omega = \frac{N!}{N_+! \, N_-!}$$

Note que para qualquer configuração se os ângulos forem todos invertidos, a distância entre as 2 extremidades é a mesma. Então

$$g(N,m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2}+m\right)! \left(\frac{N}{2}-m\right)!} = 2\Omega$$

b) Quando $m \ll N$

$$S = S(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial m^2}\right)_{m=0} m^2$$ ($S(0)$ é máximo, termo linear anula-se)

$$g(N,m) \approx g(N,0) \exp(-2m^2/N)$$

(Aproximação p. uma gaussiana, para valores de m próximos do valor de m correspondente ao máximo da distribuição)

Ver problema 1 da série 3.

Então a entropia do sistema é

$$S = k \ln g(N,m) = k \ln g(N,0) - \frac{2m^2}{N} k$$

$$L = 2md \qquad m = \frac{L}{2d}$$

$$S = k \ln g(N,0) - k_B \frac{L^2}{2Nd^2}$$

c) A 1ª lei da termodinâmica é neste caso,

$$dU = TdS + f\,dL$$

e

$$F = U - TS$$

ou seja

$$dF = -S\,dT + f\,dL$$

Então

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L = -\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \frac{kL}{Nd^2}$$

$$f = \frac{kTL}{Nd^2} + C$$

Como $f=0$ quando $L=0$, $C=0$, i.e

$$f = \frac{kTL}{Nd^2}$$

d) Considere só 1 ligação.

Quando uma força externa f é exercida

a probabilidade do ângulo ser 0° ou 180° é proporcional a e^{α} ou $e^{-\alpha}$ respectiva/, onde $\alpha = fd/_{kT}$

O comprimento médio por ligação é então

$$\bar{l} = d \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = d \tanh \alpha .$$

e o comprimento total do polímero é

$$L = N \bar{l} = N d \tanh \left(\frac{fd}{kT} \right)$$

2

a) $n_r = 0, 1, 2, \dots m$

(T, V, μ)

Para 1 estado com energia ε_i

$$\mathfrak{z}_i(T, V, \mu) = 1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} + e^{2\beta(\mu-\varepsilon_i)} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{m} e^{n\beta(\mu-\varepsilon_i)}$$

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_i \mathfrak{z}_i$$

$$\bar{n}_i = kT\left(\frac{\partial \ln \mathfrak{z}_i}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{\sum_{n=0}^{m} n\, e^{n\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{\mathfrak{z}_i}$$

$$\bar{n}_i = \sum_{n=0}^{m} n\, p_i(n)$$

com $p_i(n) = \dfrac{e^{n\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{\mathfrak{z}_i}$

b) $m = 3$

$$\mathfrak{z}_i = 1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} + e^{2\beta(\mu-\varepsilon_i)} + e^{3\beta(\mu-\varepsilon_i)}$$

$$\bar{n}_i = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} + 2e^{2\beta(\mu-\varepsilon_i)} + 3e^{3\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{\mathfrak{z}_i}$$

Bosões $n_r = 0, 1, 2, \dots \infty$

Fermiões $n_r = 0, 1$

c) Simetria da fn. de onda — Simétrica bosões

anti-simétrica fermiões

bosões	spin inteiro	nr qualquer
fermiões	spin semi-inteiro	$n_r = 0, 1$

Efeito de Hall fraccionário (2d): quasipartículas

3

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \epsilon\, \bar{n}(\varepsilon)\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$N = \int_0^\infty \bar{n}(\varepsilon)\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

e $\bar{n}(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

Densidade de estados

$$f(p)\,dp = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spin}}}{2} \times \frac{4\pi V p^2}{h^3}\, dp \qquad 3d$$

mas $\varepsilon = cp$, então

$$f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi V \varepsilon^2}{h^3 c^3}\, d\varepsilon$$

e

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = a \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\, d\varepsilon \qquad a = \frac{8\pi}{h^3 c^3}$$

$$\frac{N}{V} = a \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\, d\varepsilon$$

Expansão de Bohr - Sommerfeld.

$$\int_0^\infty h'(\varepsilon)\, \bar{n}(\varepsilon)\, d\varepsilon = h(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 h''(\mu)$$

Então

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = a\left(\frac{\mu^4}{4} + \left(\frac{\pi kT}{2}\right)^2 \mu^2\right)$$

$$= \frac{a}{4}\mu^4 \left(1 + 2\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right)$$

e

$$\frac{N}{V} = a\left(\frac{\mu^3}{3} + \left(\frac{\pi kT}{3}\right)^2 \mu\right)$$

$$= \frac{a}{3}\mu^3 \left(1 + \left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right)$$

A última equação dá-nos $\mu(T)$

$$\rho = \frac{a}{3}\mu^3\left(1 + \left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

$$\mu^3 = \frac{3\rho}{a}\left(1 - \left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

$$\mu(T) = \underbrace{\left(\frac{3\rho}{a}\right)^{1/3}}_{\mu_0}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

$$\mu(T) = \mu_0\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

Substituição desse valor na expressão p. $\langle E \rangle$

$$\mu^4(T) = \mu_0^4\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{a}{4}\mu_0^4\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)\right)\left(1 + 2\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

$$\frac{\langle E \rangle}{V} \simeq \frac{a}{4}\mu_0^4\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$$

e

$$\rho = \frac{a}{3}\mu_0^3\left(1 - \left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right) \simeq \text{constante}$$

Então, $\dfrac{E}{N} = \dfrac{3}{4}\mu_0\left(1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right)$

$$\frac{C_V}{V} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{N\pi^2 k^2 T}{V\mu_0}$$

e $\dfrac{N}{V} = \left(\dfrac{C_V}{V}\right)^{3/2} \dfrac{3^{1/2}(hc)^{3/2}}{2^{3/2}\pi^{7/2}k^3T^{3/2}} = 2 \times 10^{23}$ neutrino/m^3

4. a) $\eta = \varepsilon / kT \qquad \gamma = e^{\mu / kT}$

$$N = g \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 \, d\varepsilon}{e^{\eta - \gamma} + 1} = g \, 4\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\eta^2 \, d\eta}{e^{\eta - \gamma} + 1}$$

$$E = g \, 4\pi V kT \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\eta^3}{e^{\eta - \gamma} + 1} \, d\eta$$

b) $\mu^- + \mu^+ = \mu^{\text{fotões}} = 0$

$\mu^- + \mu^+ = 0$

simetria entre partículas e antipartículas

$N^+ = N^- \Rightarrow \mu^- = \mu^+ = 0.$

c) $N = g \, 4\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \frac{3}{2} \zeta(3) = 45{,}3 \, V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3$

$E = g \, 4\pi V kT \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \frac{21}{4} \zeta(4) = 142{,}7 \, V kT \left(\frac{kT}{hc}\right)^3$

$N = \frac{3}{4} N_{\text{fotões}} (T)$

$E = \frac{7}{8} N_{\text{fotões}} (T)$